

Exam 2015 Solutions

Antwoorden: Algorithms & Data Structures

- (a) Merk op dat `func(n div 4)` twee keer wordt aangeroepen (niet erg handig, maar het staat er nu eenmaal). Verder worden er 6 rekenkundige bewerkingen gebruikt (een vermenigvuldiging, twee optellingen, twee divs, en een kwadraat), dus de recurrente betrekking wordt $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor n/4 \rfloor) + 6$.
 - (b) Neem aan dat n een macht van 4 is (maakt voor het bepalen van de complexiteitsklasse niets uit), dan hebben we $T(n) = 2 \cdot T(n/4) + 6$. We passen nu het Master Theorema toe, met $b = 2$ en $c = 4$, dus $E = \log 2 / \log 4 = 1/2$. Er geldt dat $6 \in O(n^{1/2-\epsilon})$ voor een ϵ , dus we hebben geval 1, dus $T(n) \in \Theta(n^{1/2})$.
2. We zoeken eerst het kleinste element op in de BST door zoveel mogelijk naar links te gaan en komen zo uit op node x . Vervolgens gaan we op zoek naar het kleinste element groter dan $x.key$: als x een rechterkind heeft gaan we een keer naar rechts, en vervolgens zoveel mogelijk naar links. Heeft x geen rechterkind, dan nemen we de ouder van x .

```
def een_na_kleinste(T):
    x=T.root

    while x.left != null:
        x=x.left

    if x.right == null:
        return x.parent
    else:
        x=x.right
        while x.left != null:
            x=x.left
        return x
```

3. We nemen aan dat de tijden van de patienten in een array p zitten (gevuld van $p[1]$ tot en met $p[n]$, dus met lengte $n + 1$). We nemen aan dat de globale variabele *infinity* een zeer groot getal bevat. Het algoritme om matrix O te vullen, en uiteindelijk de waarde $O(1, T)$ op te leveren:

```
def arts(k,T):

    if T=0: return 0

    n=len(p)-1
    O=[[0 for t in ran(T+1)] for i in ran(n+2)]

    for t in ran(1,T+1): O[n+1][t]=infinity

    for i in ran(n,0):
        for t in ran(T+1):
            if p[i]>=t:
                O[i][t]=min(p[i]-t,O[i+1][t])
            else:
                O[i][t]=min(O[i+1][t-p[i]],O[i+1][t])
```

return 0[1][T]

Antwoorden: Discrete Mathematics

4. Bekijk $1 = 8 - 7 = 2(as + bt) - (ax + by) = (2s - x)a + (2t - y)b$, dan bestaan er dus coëfficiënten $\alpha = (2s - x) \in \mathbb{Z}$ en $\beta = (2t - y) \in \mathbb{Z}$ zodat $\alpha a + \beta b = 1$. Dus $\gcd(a, b) = \min\{\alpha a + \beta b > 0 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\} = 1$, dus a en b zijn relatief priem.

5. (a) Het karakteristieke polynoom van de bijhorende homogene recurrente betrekking is $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. De enige wortel hiervan is $x = 5$. Dus de algemene oplossing van de homogene recurrente betrekking is

$$a_n^{(h)} = c_1 5^n + c_2 n 5^n.$$

Als particuliere oplossing kiezen wij

$$a_n^{(p)} = An + B,$$

omdat de inhomogene term lineair is. Inzetten in de inhomogene recurrente betrekking levert $An + B - 10A(n - 1) - 10B + 25A(n - 2) + 25B = 16n + 8$ voor alle n , dus $An(1 - 10 + 25) + A(10 - 50) + B(1 - 10 + 25) = 16n + 8$ voor alle n , dus $A = 1$ en $B = 3$, en de algemene oplossing voor de inhomogene recurrente betrekking is

$$a_n = c_1 5^n + c_2 n 5^n + n + 3.$$

Nu hebben we $a_0 = 3 = c_1 + 3$, en $a_1 = 12 = 5c_1 + 5c_2 + 4$. Hieruit volgt dat $c_1 = 0$ en $c_2 = \frac{8}{5}$, en het antwoord is, voor $n \geq 1$,

$$a_n = 8n5^{n-1} + n + 3.$$

- (b) $a_1 = 2$ (voor 0, 2) en $a_2 = 5$ (voor 00, 02, 20, 22, 11). Verder hebben we

$$a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2.$$

En aangezien $a_n^0 = a_n^2 = a_{n-1}$ en $a_n^1 = 3^{n-1} - a_{n-1}$ is, krijgen we als recurrente betrekking, voor $n \geq 2$

$$a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}.$$

6. (a) Neem $G = K_{3,3} + \{v\}$ en verbind v met een willekeurige punt van $K_{3,3}$. Dan is deze graaf niet planair, want hij bevat een $K_{3,3}$ als deelgraaf, maar $m = 10$, $n = 7$, dus $m \leq 2n - 4$. Dus deze graaf is een tegenvoorbeeld.
- (b) Bewijs: Neem een willekeurige planaire tekening van G . Merk op dat, als we in een gesloten trail langs de "grens" van een willekeurig gebied lopen, dat we minstens 4 lijnen moeten aflopen, want er bestaan geen cycles van oneven lengte, dus elke cycle heeft lengte minstens 4 (merk op dat K_2 hier een tegenvoorbeeld zou zijn, daarom hebben we $m > 1$ aangenomen). Laat f_i de aantal lijnen zijn die we aflopen langs de grens van gebied i . We concluderen $2m = \sum_{i=1}^r f_i \geq 4r$, met $r =$ aantal gebieden van G . Nu geldt de Euler formule voor G , dus

$$n - m + r = 2.$$

Dus $r \leq \frac{1}{2}m$, en daarom $2 = n - m + r \leq n - m + \frac{1}{2}m = n - \frac{1}{2}m$. Dus $m \leq 2n - 4$.

7. We berekenen eerst de aantal mogelijkheden waarbij een vaste persoon, zeg 1, hooguit 15 krijgt. Dat is gegeven door de coefficient van x^{50} van de genererende functie

$$f(x) = (x^{10} + x^{11} + \dots)^2 (x^{10} + x^{11} + \dots + x^{15}) = x^{30} \frac{1 - x^6}{(1 - x)^3}.$$

Dat is dus de coefficient van x^{20} van

$$\frac{1}{(1-x)^3} - \frac{x^6}{(1-x)^3}.$$

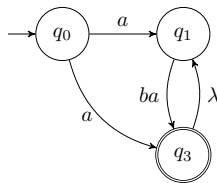
Dus dat is $\binom{-3}{20} - \binom{-3}{14} = \binom{22}{20} - \binom{16}{14} = 111$. Het antwoord is dus $3 \cdot 111 = 333$.

8. (a) Neen een driehoek met lijn lengtes 1, 1, 2. Dat is een tegenvoorbeeld.
 (b) Laat $D(s)$ de verzameling lijnen zijn uit $\delta(s)$ met de laagste kosten. Dan geldt dat $D(s) \subseteq D_s$, want $d_e \geq 0$ voor alle $e \in E$. Vanwege de 'cut condition' voor kortste paden moet verder minimaal een lijn $e \in D(s)$ bestaan zodat $e \in T$.

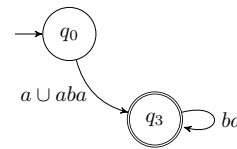
Antwoorden: Languages & Machines

9. (a) **Methode 1:**

Eerst knoop q_2 elimineren:



Dan knoop q_1 elimineren:

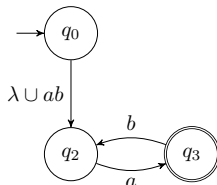


Ex-

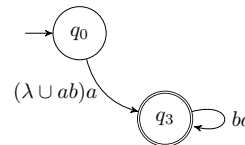
pressie aflezen: $(a \cup aba)(ba)^*$. Eventueel versimpelen tot: $a(ba)^*$.

Methode 2:

Eerst q_1 elimineren:



Dan q_2 elimineren:



Ex-

pressie aflezen: $(\lambda \cup ab)a(ba)^*$. Eventueel versimpelen tot: $a(ba)^*$.

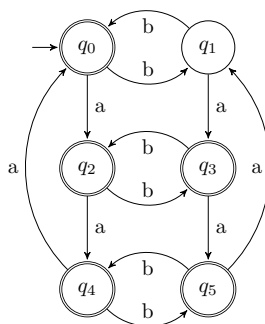
- (b) λ -closure and input-transitie tabel:

	λ	a	b
0	$\{0, 2\}$	$\{1, 3\}$	\emptyset
1	$\{1\}$	\emptyset	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 3\}$	\emptyset
3	$\{1, 3\}$	\emptyset	$\{2\}$

- (c) DFA:



10. (a) L_1 is regulier, want $L_1 = \mathcal{L}(E_1)$ voor reguliere expressie: $E_1 = (aaa)a^*$.
- (b) L_2 is niet-regulier, bewijs met de pompstelling: Laat $k > 0$ willekeurig gegeven zijn, kies $z = a^k b^{k+1}$, dan $|z| \geq k$ en $z \in L_2$ (want $k < k+1$). Laat u, v, w willekeurig gegeven zijn, zodanig dat $z = uvw$, $|uv| \leq k$ en $|v| > 0$. Dan moet $u = a^m$, $v = a^n$ en $w = a^{k-m-n} b^{k+1}$ zijn voor zekere $m \geq 0$ en $n > 0$. Kies $i = 2$, dan $uv^i w = a^{k+n} b^{k+1} \notin L_2$, want $n \neq 0$, dus $k+n \geq k+1$. We hebben laten zien dat $\forall k > 0 : \exists z : |z| \geq k \wedge z \in L_2 \wedge \forall u, v, w : |uv| \leq k \wedge |v| > 0 \wedge z = uvw \rightarrow \exists i : uv^i w \notin L_2$. Dus L_2 is niet regulier (“contrapositie” van de pompstelling).
- (c) **Methode 1:** Regulier, want $L_3 = \mathcal{L}(M_3)$, waarbij M_3 de volgende DFA is. Merk op dat alleen q_1 niet acceptierend is, want woorden naar q_1 hebben wel een drievoud aan a 's maar geen tweevoud aan b 's.



Methode 2: L_3 bestaat uit de woorden die *geen* drievoud aan a 's bevatten, of *wel* een even aantal b 's bevatten ($(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$). Dus L_3 kan worden geschreven als:

$$L_3 = \overline{(b^* ab^* ab^* a)^* b^*} \cup (a^* ba^* b)^* a^*$$

Een alternatieve definitie die gebruik van parallele compositie:

$$L_3 = \overline{((aaa)^* || b^*)} \cup ((bb)^* || a^*)$$

Omdat reguliere talen gesloten zijn onder complement en parallele compositie, is L_3 ook regulier.

- (d) Stel dat $L_5 - L_4$ regulier is. Iedere eindige taal is regulier; L_4 is eindig, dus is ook $L_4 \cap L_5$ eindig, en dus ook regulier. Reguliere talen zijn gesloten onder vereniging, dus dan is ook $L_5 = (L_5 - L_4) \cup (L_4 \cap L_5)$ regulier. Dit is een tegenspraak met het gegeven dat L_5 niet regulier is. Dus $L_5 - L_4$ is ook niet regulier.